

Maandblad voor de didactiek van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskunde-werkgroep van de w.v.o.

50e jaargang
1974/1975
no 1
aug./sept.

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - W. Kleijne, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 25,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 26,50. Hiervoor wende men zich tot:

Wolters-Noordhoff bv, Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-162222.
Tarieven: 1/1 pag. *f* 200,—, 1/2 pag. *f* 110,— en 1/4 pag. *f* 60,—.

Het aanvankelijk meetkunde-onderwijs (1)

DE PERIODE TOT 1924

A. TREFFERS EN E. DE MOOR

De modernisering van ons wiskunde-onderwijs in de zestiger jaren van deze eeuw heeft het stelsel van Euclides in zijn traditionele vorm, mèt de in de negentiende eeuw naar voren gekomen 'nieuwere meetkunde', uit ons schoolonderwijs doen verdwijnen en laat het probleem van aard en plaats van het resterend 'meetkunde'-onderwijs binnen ons voortgezet onderwijs tot dusver onopgelost.

Dr. Joh. H. Wansink
Euclides 49-10

0 Inleiding

Het wiskunde-onderwijs is zo oud als de wiskunde en de metode van onderwijs is, evenals het doel van dat onderwijs, zeer verschillend naar de tijd. Zo was het wiskunde-onderwijs in de 17e en 18e eeuw praktisch gericht; de utiliteit was maatgevend voor de leerstof, die doorspekt was met toepassingen.
Vanaf het einde van de 18e eeuw ging het formele aspekt steeds duidelijker spreken. We kunnen dit illustreren met het volgende citaat: 'Het Wis, Bouw en Natuurkundig Genootschap te Leyden onder de zinspreuk: de Wiskunde is de moeder der wetenschappen, bekroonde in het jaar 1797, een werkje met goud, tot motto hebbende: de kennis der Meetkunde is de eerste stap om een verstandig man te worden'. (1)
In de 19e eeuw domineerde de neo-humanistische geest met z'n sterke waardering voor het formele karakter van de wiskunde — voor zover er van waardering buiten de filologische onderwijsvakken sprake was — en zijn anti-utilitarisme, maar het verzet van de Napoleontisch realistische geest bleef ongebroken gehandhaafd.
Rond de eeuwwisseling, toen het wiskunde-onderwijs vooral bedreven werd op het veld van de dorre logika — sterke nadruk op het deduktieve element, het eksposeren van sluitende bewijsketens — kwam er een toenemend verzet tegen de verschrompeling van het aanschouwelijke, eksperimentele, en kreatieve element, terwijl de roep om toepasbare wiskunde steeds luider klonk.
Hier en daar werd van gezaghebbende zijde — Klein, Poincaré, Nunn, Young — een niet deduktieve inleiding in de meetkunde bepleit, wat echter in Nederland slechts bij een enkeling weerklank vond. Hoestra vertaalde een Engelse inleidende kursus (1907) Voerman schreef 'Meten en teekenen' en Kleefstra wijdde een beschouwing 'over het onderwijs in de wiskunde' (1909), waarin hij de deduktieve metode voor het aanvangsonderwijs bestrijdt en de 'empiristische' metode van de lagere school vooral aanprijst, omdat de vormleer, die een schakel vormde tussen de lagere en de middelbare school, in 1889 als leervak van de lagere school geschrapt was.

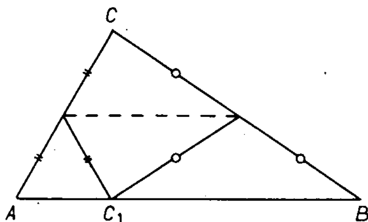
1 Vormleer

De vormleer 'prentte den leerling de voornaamste begrippen van de meetkunde in volgens de aanschouwelijke en zelfzoekende methode, de eenige die voor het onderwijs aan kinderen geschikt is. Zij gaven de hoofdlijnen aan, volgens welke methodiek van het onderwijs in de wis- en natuurkunde bij het middelbaar en het hooger onderwijs zich had behooren te ontwikkelen en zich ongetwijfeld ook zou hebben ontwikkeld, als het middelbaar onderwijs zich van meet af had beschouwd als een natuurlijke voortzetting van het lager onderwijs, in plaats van zich op academisch standpunt te stellen'. (2)
Wilkeshuis merkt echter over de vormleer op: 'Helaas verdwaalde ook dit vak weer in de spooktuin van de abstractie'. (3) 'Bepaald jammer was het dan ook niet, dat dit vak uit de lagere school verdween'. (4)
Om te oordelen wat de vormleer is of beoogde te zijn en om de waarde ervan te schatten, doen we er het beste aan om te rade te gaan bij Pestalozzi's schildknaap in Nederland, nl. Van Dapperen.
'De vormleer is een middel om het kind op te leiden tot het naauwkeurig en geregeld beschouwen, der dingen, uit alle mogelijke oogpunten en dat wel met zoo veel zekerheid, dat het kind niet twijfelt of het al de mogelijkheden van hetgene hem voorgedragen is, naauwkeurig heeft ontdekt en opgegeven'. (5)
'Tevoren reeds hebben wij aangemerkt, dat onze bedoeling niet zozeer is, de kinderen vroegtijdig met eenige wetenschappen bekend te maken, maar veeleer het verstand der kinderen te ontwikkelen, en hunnen geest aan geregeld, trapsgewijze denken te gewennen'. (6)
'Maar waarom juist mathematische figuren? zal misschien iemand vragen. Gaarne zou ik mij van voorwerpen uit het dagelijksche leven bedienen, indien mij een eenig bekend ware, hetwelk zoo alomvattend in deszelfs bedoeling, zoo eenvoudig in deszelfs bestanddeelen was; waarvan de beginselen zoo gering waren, maar wiens zamenstelling, die veelvuldige wijziging toeliet, als juist mathematische figuren; waarbij het kind en de onderwijzer nooit behoeven verlegen te staan, wijl het hun aan bouwstoffen mangelt, dat tevens den kinderen leert opmerken, zich uitdrukken en hun denkvermogen oefent, zonder te veel kennis in het kind te veronderstellen; dat eindelijk de kinderen daarheen brengt, alle resultaten der figuren in verdere oefening, zelf te vinden'. (7)
De oefening bestaat uit: de onderlinge ligging van punten — samenvallend of niet samenvallend — en van lijnen — samenvallend, snijdend, evenwijdig —; het bepalen van soorten hoeken, ligging van de hoeken t.o.v. elkaar; driehoeken onderscheiden naar hoeken, zijden en kombinaties ervan; vierhoeken onderscheiden naar hoeken, zijden en kombinaties ervan, verdeling van een driehoek door een lijn, idem met een vierhoek.
Inderdaad, alle mogelijkheden om te verdwalen in de spooktuin der abstraktie waren aanwezig.

2 Kleefstra
De beschouwingen van Kleefstra over de leerstofkeuze en ordening daarentegen doen uiterst modern aan.
Begin met de rechthoek en ga volgens de analytische metode de begrippen hoek en lijn er uit afleiden.
'Voorts lijkt 't mij een natuurlijke voorwaarde, dat de leerlingen eenig materieel in handen krijgen (ik gebruik daarvoor altijd breipennen en kurkjes) om de figuren en lichamen, waar over gesproken wordt, zelf te maken.
Eenmaal het kwadraat en den rechthoek tot uitgangspunt nemende, moest ik natuurlijk de meetkunde bouwen op de parallelograms in plaats van op de driehoeken en kon ik niet ontkomen aan de moeilijkheid, om vervolgens de eigenschappen der driehoeken uit die der parallelograms af te leiden.
Hoewel ik hierin naar wensch geslaagd ben, en mij wellicht nog te rationeel heb gehouden aan den eisch van logische opeenvolging, ben ik toch van meening, dat men in het elementaire onderwijs niet zoo angstvallig hoeft te zijn in de bewijsvoering van voor de hand liggende waarheden, die door onbevooroordeelde waarneming bevestigd worden'. (8)
Als voorbeeld geeft Kleefstra de oppervlakte bepaling van een parallelogram door er een rechthoek van te maken voordat kongruentie van driehoeken ter sprake is gekomen. Kleefstra maakt dus gebruik van de aanschouwelijke evidentie in het aanvangsonderwijs en dit was in die tijd een onaanvaardbare koncessie aan het kinderlijke bevattingsvermogen.
Ook in het 'Leerboek der Planimetrie' van Gravelaar (1907[3]) wordt in het begin een aantal eigenschappen (over 2 evenwijdige lijnen gesneden door een derde) aangenomen op grond van 'vanzelfsprekendheid'.
Deze koncessie vindt echter plaats in een syntetische opbouw van de meetkunde, terwijl de analytische opbouw van Kleefstra in zijn geheel plaatsvindt met het oog op het kinderlijk bevattingsvermogen.
In het geval Gravelaar wordt er water in de wijn gedaan, in het geval Kleefstra limonade toegediend.

3 Reindersma
Vlak vòòr de eerste wereldoorlog verscheen er in Nederland een leerboek voor een eksperimentele behandeling van de meetkunde.
De leerstof die niet wezenlijk afwijkt van de traditionele, bevat de volgende onderwerpen:
1 de rechte lijn
2 de kromme lijn
3 over vlakken
4 over hoeken
5 over het tekenen van driehoeken en vierhoeken
6 over evenwijdige lijnen
7 over kongruentie en symmetrie
8 over oppervlakteberekening
9 over de cirkel.

De metode van Reindersma kenmerkt zich door:
— Het gebruik van traditionele leerstof met 'n praktisch gericht toepassingenveld. Er wordt vooral verrijking van kennis der eigenschappen beoogd. De eigenschappen blijven echter beperkt tot dezelfde stellingen, als die van de logisch-deduktieve richting.
— De opbouw van de teorie vindt plaats in de vraagstukken.
— Schatten, meten, vouwen, knippen, plakken, tekenen — ook op doorzichtig papier — schuiven, draaien, vloeien en konstrueren om eigenschappen te ontdekken en opdrachten uit te voeren.
Zo wordt bijvoorbeeld de eigenschap, dat de basishoeken in een gelijkbenige driehoek gelijk zijn, ontdekt door:
1 herhaalde meting in verschillende gevallen
2 door vouwen van de driehoek om de hoogtelijn uit de top
De gevonden eigenschap wordt dan weer gebruikt om te ontdekken dat de som van de hoeken van een driehoek 180° is. Deze laatste eigenschap kan namelijk ook ontdekt worden door:
1 herhaalde meting in verschillende gevallen
2 door het vouwen van de driehoek om de middenparallel, waarbij de volgende figuur ontstaat:



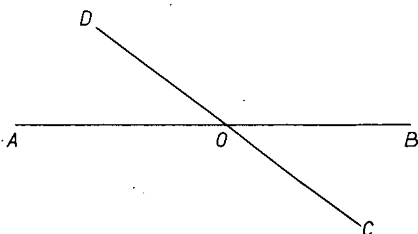
Knippen, vouwen en plakken worden vooral gebruikt in het hoofdstuk over oppervlakteberekening. Schuiven, draaien en vloeien komen in het hoofdstuk over kongruentie en symmetrie aan de orde, waarbij een onderscheid tussen kongruent en symmetrisch aangebracht wordt.

'We vinden dus dat we sommige figuren tot bedekking kunnen brengen en we weten, dat we deze congruent noemen. Nu zijn er evenwel ook figuren, die we eerst dan tot bedekking kunnen brengen, nadat we de eene hebben omgeklapt. Zulke figuren zullen we symmetrisch noemen'. (9)

Het begrip symmetrisch wordt dan verhelderd door gebruik te maken van vloeipapier: teken een driehoek, vloei de tekening af op vloeipapier, knip de figuur uit en probeer door middel van schuiven en draaien de oorspronkelijke driehoek te bedekken.
De leerling merkt dan op, dat dit alleen mogelijk is door omklappen, of in het algemeen door omvouwen; de as van symmetrie wordt daarbij als vouwlijn geïntroduceerd.
Kongruentie wordt vrijwel niet gebruikt om eigenschappen te bewijzen, maar

symmetrie daarentegen speelt 'n belangrijke rol ter verduidelijking van de grondkonstrukties door middel van de ruit.
Konstrukties worden voorafgegaan door behandeling van de cirkel als meetkundige plaatsen, vaak voorbereid door omvouwing en door gebruikmaking van doorzichtig papier.

— Alle eigenschappen die ontdekt worden moeten eksakt geformuleerd worden en dit geldt ook voor een vanzelfsprekende stelling als bijvoorbeeld de eigenschap, dat de middellijnen in een cirkel even lang zijn. Reindersma gebruikt eenvoudige taal in teorie en toepassing.
— In het geheel van het boek valt 'n zekere opbouw te konstateren en dit heeft tot gevolg, dat men niet zomaar hier en daar een greep uit het gebodene kan doen. Het leerboek heeft dan ook een tweeledig doel: het wil een systematische inleiding geven voor die schooltypen — U.L.O. en M.M.S. — die een overzicht van de voornaamste waarheden der vlakke meetkunde behoeven zonder, dat aan het bewijs een of andere eis van gestrengheid gesteld wordt, maar tevens beoogt het boek een propedeutische introduktie te geven op 'n matematische in plaats van empirische benaderingswijze.
Er vindt dus geen geleidelijke overgang plaats naar een meer deduktieve behandeling der leerstof, dat wil zeggen: in de propedeutische kursus, die ook als 'n systematische inleiding gebruikt kan worden, blijft de behandeling empirisch om vervolgens in het tweede deel dezelfde leerstof — abrupt — op een geheel andere wijze te benaderen, namelijk door gebruik te maken van de aksiomatische metode.
Uitgaande van 13 aksioma's wordt het gebruikelijke stellingenkompleks opgebouwd, waarbij echter opgemerkt moet worden, dat de schrijver alle moeite doet om de misverstanden, die een dergelijke inleidingsprocedure met zich meebrengt, uit de weg te ruimen en wel door het bewijs in de eerste hoofdstukken in een onderhoudende, weinig schematische stijl weer te geven. We geven een voorbeeld van de manier waarop Reindersma in het tweede deel (wiskunde als deduktieve wetenschap) de overgang van een empirische naar een logisch-deduktieve opvatting aangeeft:



'Stelling 3': twee overstaande hoeken zijn gelijk.
We zullen nu moeten bewijzen, dat $\angle AOD = \angle COB$
Daartoe meten we $\angle AOD$ en vinden, dat deze bijvoorbeeld 40° is.

Dan is $\angle AOC = 180° - 40° = 140°$, maar ook $\angle AOC$ en $\angle COB$ zijn nevenhoeken. We vinden dus $\angle AOD = \angle COB$.
Hier is nu een tegenwerping te maken, namelijk dat we niet precies kunnen meten, hoe groot $\angle AOD$ is. Deze moeilijkheid kunnen we evenwel vermijden door te zeggen: laat $\angle AOD$ $a°$ zijn. Dan is $\angle AOC = 180° - a°$.
$\angle COD = 180° - a° = 180° - 180° + a° = a°$.
Hier hebben we dus gebruik gemaakt van de Algebra.
Maar nog korter kunnen we aldus redeneren:
$\angle AOD$ heeft tot supplement $\angle COA$
$\angle BOC$ heeft eveneens $\angle COA$ tot supplement.
Twee hoeken, die denzelfden hoek tot supplement hebben, zijn gelijk (stelling 2).' (10)

— Reindersma geeft dus een propedeuse met gebruikmaking van de empirische metode, wat tot doel heeft om de eigenschappen der traditionele meetkunde te ontdekken en te formuleren en dit gebeurt dan in een systematisch opgezette leergang, waarin teorie en vraagstukken nauw met elkaar in verband staan.

4 Wolda

Wolda heeft in het begin van de twintiger jaren een leerboek laten verschijnen, dat bedoeld was om de plaats van de euclidische metode in te nemen.
Hij verwerpt de klassieke metode van meetkunde-onderwijs volledig:
'De wiskunde dreigt zijn goeden naam te verliezen en we gelooven, dat zijn zuiver klassieke methode daarvan de oorzaak is'. (11)

De fout van het traditionele meetkunde-onderwijs bestaat volgens Wolda hierin 'dat we den leerling streng wetenschappelijke bewijsvoeringen willen opdringen van beweringen, die naar zijn inzicht absoluut geen bewijs van noode hebben'. (12)
'Laat de leerling zoeken, proberen, tekenen, laat hem zijn grote voorwetenschappelijke kennis analyseren en scherp tot bewustzijn brengen, laat hem zijn kennis formuleren en de drang tot onderzoek ontplooien en pas dan 'kan hij iets gaan voelen voor de arbeid, die noodig was om tot strengere definities te komen, die het einde — niet het begin — der wetenschap zijn'. (13)

Ontwikkel de wiskundige intuïtie aan een ruim wiskundig gebied, dat niet zuiver meetkundig van karakter hoeft te zijn.
Laat de leerlingen zich oriënteren in eigen kennis en kunnen.
Besluit de steeds strenger wordende onderwijsmetode met een streng wetenschappelijke behandeling van het begin der wiskunde.
De metode van Wolda heeft de volgende karakteristieke trekken:
— In het begin worden geen aksioma's gegeven.
— Het bewijs wordt in het begin op eenvoudige wijze gebruikt in het hoofdstuk: 'De som van twee zijden van een driehoek is grooter dan de derde'.
De stelling zelf wordt niet bewezen, maar de redeneringen die erop gebouwd

zijn, zijn korrekt en in de vraagstukken wordt ook een eksakte bewijsvoering gevraagd.
— Aanvankelijk wordt de nadruk vooral op het tekenen en het konstrueren gelegd.
— Later als de nadruk wat meer op het bewijzen komt te liggen, steunen deze bewijzen op de werkelijk uitgevoerde konstrukties. Om dit aksent op de konstruktie nog eens ekstra te laten horen wordt er niet gesproken over het 'gegeven' maar over 'wat gedaan is'. Pas aan het einde van het eerste deel — 'Congruentie' — wordt de eis, dat een konstruktie moet voorafgaan aan het bewijs, losgelaten; een eis die de praktische moeilijkheid met zich meebrengt dat een vraagstuk, dat op andere wijze gekonstrueerd is ook een ander bewijs krijgt, zodat de bespreking niet klassikaal kan geschieden.
Het indirekte bewijs wordt in deel I niet en in deel II — 'Over evenredigheid en berekeningen' — slechts spaarzaam toegepast.
— De leerstof wijkt sterk af van de euclidische schoolmeetkunde, zoals blijkt uit de volgende opsomming van onderwerpen die aan de orde komen en begrippen die ingevoerd worden:

Regelmaat, symmetrie, afhankelijkheid, draaien en wentelen, verzamelingen, vergroting, manieren waarop figuren zichzelf kunnen bedekken, tekenen van regelmatige veelhoeken, richting en verschuiving.
Vooral het begrip verzameling krijgt ruime aandacht: 'In eenvoudige gevallen vragen we naar een verzameling om tot een behoorlijke omschrijving te geraken; soms om begrippen te ontwikkelen, andermaal, in moeilijke gevallen, om haar langs experimenteelen weg uit te vinden. Voor wie het antwoord intuïtief kan geven is het experiment natuurlijk onnoodig'. (14)
Vaak gaat een intuïtieve behandeling vooraf aan een streng logische behandeling, die dan gevolgd wordt door een reeks vraagstukken.
— Er is geen duidelijke scheiding tussen teorie en vraagstukken; veel eigenschappen worden door de leerling zelf ontdekt. De opgaven dienen enerzijds om de oude teorie te herhalen in vooral praktische toepassingen ontleend aan het dagelijkse leven en aan vakken als natuurkunde, aardrijkskunde en mechanika, anderzijds worden de vraagstukken gebruikt om nieuwe teorie voor te bereiden.
Opvallend is het feit, dat de vraagstukken soms opzettelijk onvolledig zijn en daardoor meerdere oplossingen toelaten.
Er worden niet veel vraagstukken aan een bepaald onderwerp gewijd direkt nadat het behandeld is: bij de vraagstukken komen steeds weer andere onderwerpen aan de orde, uitgezonderd in het eerder genoemde hoofdstuk over de som van twee zijden van een driehoek, waar juist wel dezelfde soort bewijssommen bij elkaar staan om de leerling aan de nieuwe werkwijze te laten wennen.
Aan het einde van deel III — 'De Cirkel' — wordt een meer wetenschappelijke behandeling van het begin der wiskunde gegeven en de leergang wordt besloten met een opsomming van de traditionele eigenschappen die in deze metode

— langs een andere weg — behandeld worden.
De metode Wolda kenmerkt zich dus door:
— De niet-traditionele leerstof.
— De nadruk op de analyse der voor-wetenschappelijke ervaring.
— De systematische inleiding.

5 Internationale ontwikkelingen
Het aanvangsonderwijs in de meetkunde was ook één van de studie-objekten van de 'Commission Internationale de l'enseignement Mathématique' — afgekort C.I.E.M. — die in 1908 besloot om het wiskunde-onderwijs in verschillende landen te bestuderen. Klein, Greenhill en Fehr behoorden tot een kommissie, die rapporten verzamelde onder medewerking van subkommissies, om mede een antwoord te geven op de vraag in hoeverre er sprake was van een streng logische opbouw van de wiskunde voor het middelbaar onderwijs in de verschillende landen.
'Ter oriëntering bij de beantwoording dezer vragen had Lietzmann voor de leden der commissie een schema opgesteld. Naar den 'graad der strengheid' onderscheidt hij de volgende vier mogelijkheden:

A. De grondslagen worden in hun volle strengheid door de axioma's gelegd en het systeem wordt langs zuiver deductieve weg opgebouwd.
B. De grondslagen zijn empirisch, zonder de hulp van axioma's. Op een zeker ogenblik gaat men over tot het streng bewijzen der stellingen.
C. Intuïtieve beschouwingen wisselen af met de deductieve methode in de verschillende deelen van het onderwijs.
D. De methode der deductie wordt niet gebruikt; de wiskunde wordt gebaseerd uitsluitend op proefneming en intuïtie'. (15)

De konklusie van de kommissie luidde — na bestudering van de rapporten — dat A en D in geen enkel land voorkwamen voor het middelbare onderwijs in het algemeen, B vooral in Frankrijk en Italië, C vooral in Duitsland en Oostenrijk. Op grond van het ontbreken van niet-deduktieve inleidingen mogen we stellen dat ook voor Nederland C gold, waarmee we de vraag naar de ordening van de leerstof beantwoord hebben m.b.t. de periode vóór de 1e wereldoorlog.

Ook was de vraag naar het samenstellen of relaties leggen tussen de verschillende delen der wiskunde aktueel. Tot de fusionisten moesten gezaghebbende mensen als Moore (V.S.), Perry (Engeland) en Klein (Duitsland) gerekend worden, maar ook de puristen, die de verschillende delen der wiskunde gescheiden wilden houden, waren niet weg te cijferen.

6 Nederland
Tijdens de eerste wereldoorlog vonden in Nederland de eerste vergaderingen van leraren plaats ten huize van Ehrenfesst-Afanassjewa, met als onderwerp

een niet-duktieve en niet-eksperimentele inleiding in de meetkunde.
Bij deze vernieuwingspoging, die weliswaar een voortijdig einde vond vlak na de eerste wereldoorlog, werd het zaad gelegd voor de uitbloei van de Wiskunde Werkgroep, die in 1936 als afdeling van de Werkgroep Vernieuwing Onderwijs (W.V.O.) opgericht werd. In de jaren rond 1920 heerste er in Nederland — in het algemeen gesproken — een gedeprimeerde stemming aangaande de waarde van wiskunde als leervak voor de scholen van U.L.O., M.O. en V.H.M.O. Handhaving van wiskunde als leervak werd nu veel meer verdedigd op grond van haar toepasbaarheid in de natuurwetenschap en haar onmisbaarheid bij verdere studie, dan om de bijdrage die het wiskunde-onderwijs zou leveren aan de ontwikkeling van het logische denken (in vergelijking met een halve eeuw geleden). De resultaten van het aanvangsonderwijs in de meetkunde waren onbevredigend. Uit een vijftal onderzoekingen, waarbij in totaal duizenden leerlingen betrokken waren, bleek dat wiskunde een moeilijk vak genoemd moest worden: hoog percentage onvoldoenden — bijna 30% —, een laag gemiddelde — ruim vijf, waarbij we bedenken dat vóór 1930 vijf als zwak gekwalificeerd werd — en een relatief grote spreiding van de cijfers.
De oorzaak van de slechte resultaten werd enerzijds gezocht in een algemene teruggang van het intelligentiepeil der leerlingen of wat op hetzelfde neerkomt in een onvoldoende selektie, anderzijds in een onjuiste didaktiek van het aanvangsonderwijs.

7 'Euclides'

De brochure van Ehrenfest-Afanassjewa 'Wat kan en moet het Meetkunde-onderwijs aan een niet-wiskundige geven', waarin ook kritiek werd uitgeoefend op de traditionele leerstof-ordening en omvang van het aanvankelijk meetkunde-onderwijs en op de bijbehorende onderwijsmetoden, ontlokte een reaktie van Dijksterhuis. Er ontstond een polemiek die de direkte aanleiding vormde tot de oprichting — in oktober 1924 — van een tijdschrift voor de didaktiek der exacte vakken, dat aanvankelijk verscheen als Bijvoegsel van het 'Nieuwe tijdschrift voor Wiskunde', maar dat na drie jaar zelfstandig onder de naam 'Euclides' ging verschijnen.

8 Naschrift

Vijftig jaar geleden gaf het meetkunde-onderwijs dus aanleiding tot heftige gedachtenwisselingen. Ook nu is de kwestie weer aktueel: zowel bij het basisonderwijs als het voortgezette onderwijs is de meetkunde het middelpunt van internationale diskussies.
Al met al is er voldoende reden om de kernvraag uit de eerste jaargang
'Moet het meetkunde-onderwijs gewijzigd worden?'
in de vijftigste aflevering opnieuw te stellen.
De serie van drie artikelen getiteld 'Het aanvankelijk meetkunde-onderwijs' vormt de inleiding op een speciaal meetkunde-nummer van Euclides, waarin een aantal wiskunde-didaktici hun licht over het meetkunde-onderwijs zullen laten schijnen.

Noten

1 Dapperen, D. van
Vormleer; Amsterdam 1825, p. 34

2 Kleefstra, J.
Over het onderwijs in de wiskunde; Haarlem 1909, p. 6

3 Wilkeshuis, D. van
Daantje zou naar school toe gaan; Honderdjaar 'volksonderwijs'; Utrecht 1966, p. 117

4 ibid

5 Dapperen, D. van
Vormleer; Amsterdam 1825, P. 34

6 loc. cit. p.30

7 loc. cit. p.33

8 Kleefstra, J.
Over het onderwijs in de wiskunde; Haarlem 1909, P. 29

9 Reindersma, N.
Over het inleidende onderwijs in de meetkunde; Groningen 1912, p. 41

10 loc. cit. p. 8

11 Wolda, G.
Meetkunde (theorieën en vraagstukken) I Congruentie; Zwolle 1921, het voorbericht (ongenummerd)

12 ibid

13 ibid

14 ibid

15 Schrek, D.J.E.
De 'Commission internationale de l'enseignement mathématigque' 1908-1920 in 'Paedagogische Studiën' 3 (1922-1923), p. 114

16 Gage, N.L.
Handbook of research on teaching; Chicago 1964, p. 1010

Over de afstanden van punten tot delen van rechte lijnen

Dr. JOH. H. WANSINK

Arnhem

1 Een algemeen afstandsbegrip komt in ons elementair wiskunde-onderwijs vaak onvoldoende uit de verf. Hierdoor kunnen moeilijkheden ontstaan, ook bij de interpretatie van overigens eenvoudige vraagstukken.
Wordt bijvoorbeeld gevraagd in het platte vlak de verzameling te tekenen van de punten die op een gegeven afstand van AB verwijderd zijn, dan kunnen de oplossingen er als volgt uitzien:

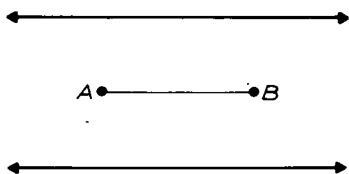


Fig. 1

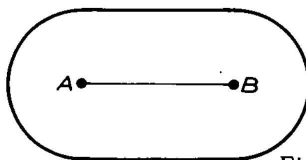


Fig. 2

Het hangt er maar van af van welke afstandsdefinitie men wenst uit te gaan.
In *Korrel* CLI (*Euclides* 45, p. 55-p. 58) zijn drie definities vermeld die we in ons onderwijs kunnen aantreffen.
We zullen in dit artikel uitgaan van de volgende algemene afstandsdefinitie:
Onder de afstand van een punt P tot een puntverzameling V verstaan we het minimum (eventueel: de onderste grens) van de afstanden van P tot de punten van V.
In genoemde korrel beschouwden we in het bijzonder de verzameling van de punten die gelijke afstanden hebben tot de benen van een hoek AOB. We vonden daarvoor de 'gewone' bissectrice met nog een 'hoekgebied' van punten waarvan de projecties op de dragers van OA en OB op de verlengden van AO en BO vallen.

2 We geven aan de beschouwingen uit *Korrel* CLI enige uitbreiding door de verzameling te beschouwen van de punten die op gelijke afstanden liggen van twee zijden van een driehoek, algemener: door de verzameling te onderzoeken van de punten die op gelijke afstanden liggen van twee gegeven lijnsegmenten.
Het gaat dus om de verzamelingen:

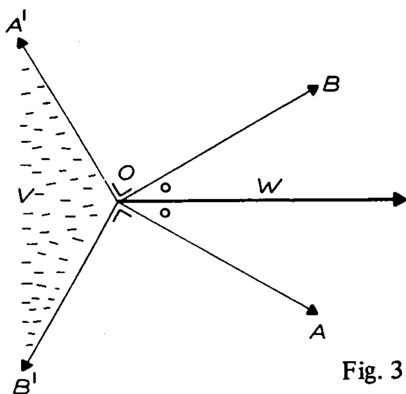


Fig. 3

$$V_1 = \{X \mid d(X,AB) = d(X,AC)\}$$

en $$V_2 = \{X \mid d(X,AB) = d(X,CD)\}.$$

3 De verzameling $V_1 = \{X \mid d(X,AB) = d(X,AC)\}$

Dit is de verzameling van de punten die gelijke afstanden hebben tot de zijden AB en AC van een gegeven driehoek ABC.

We beschouwen het geval waarin $AC < AB$.

De verzameling V_1 blijkt te bestaan uit de volgende vier delen:

D_1: een hoekgebied bij A begrensd door de loodlijnen die in A opvolgend op AB en AC kunnen worden opgericht; beide loodlijnen 'naar buiten'; zie naar fig. 3;

D_2: het lijnstuk AP op de bissectrice van hoek BAC, waarvan de projectie op de drager van AC het lijnstuk AC zelf is;

D_3: de boog PQ van de parabool met C tot brandpunt en de drager van AB tot richtlijn, waarvan de projectie op de drager van AB het lijnstuk AB is verminderd met de projectie van AP op AB;

D_4: de van Q uitgaande halve rechte op de middelloodlijn van CB waarvan de projectie op de drager van AB het verlengde is van AB.

De verzameling $V_2 = \{X \mid d(X,AB) = d(X,CD)\}$.

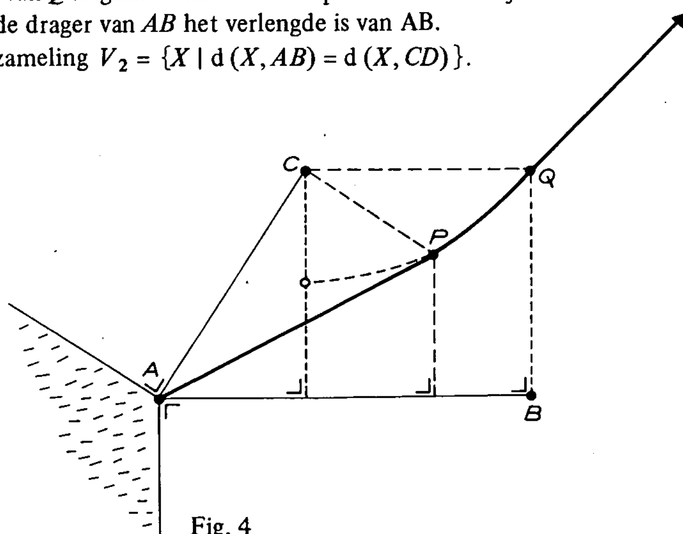


Fig. 4

We zullen afzonderlijk de gevallen behandelen waarin *AB* en *CD* al of niet een punt gemeen hebben.

a *AB* en *CD* hebben geen punt gemeen.

We illustreren dit geval met een figuur, waarin de projectie van *A* op de drager van *CD* op het verlengde van *DC* ligt, terwijl de projectie van *B* op die drager een punt is tussen *C* en *D*.

De verzameling V_2 bestaat nu uit de volgende vijf delen:

D_1: het lijnstuk *PQ* op een van de bissectrices van de hoeken van de dragers van *AB* en *CD*, zodanig dat de projecties van het lijnstuk *PQ* op die dragers deelsegmenten van *CD* en *AB* zijn; de projecties van *P* en *Q* op de dragers van *CD* en *AB* zijn opvolgend de punten *C* en *B*;

D_2: de van een punt *R* op de middelloodlijn van *AC* uitgaande halve rechte waarvan de projecties op de dragers van *AB* en *CD* halve rechten zijn die gelegen zijn op de verlengden van *BA* en *DC*; de projectie van *R* op de drager van *AB* is het punt *A*;

D_3: de van een punt *S* op de middelloodlijn van *BD* uitgaande halve rechte waarvan de projecties op de dragers van *AB* op *CD* halve rechten zijn die gelegen zijn op de verlengden van *AB* en *CD*; de projectie van *S* op de drager van *CD* is het punt *D*;

D_4: de boog *PR* van de parabool met *C* tot brandpunt en de drager van *AB* tot richtlijn;

D_5: de boog *QS* van de parabool met *B* tot brandpunt en de drager van *CD* tot richtlijn.

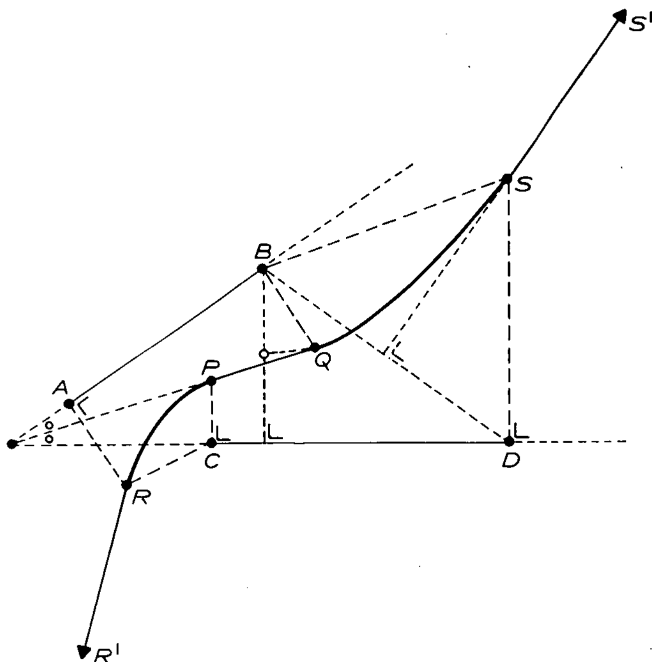


Fig. 5

Opmerkingen

1 De paraboolbogen *PR* en *QS* raken in hun uiteinden aan de aangrenzende bissectrices en middelloodlijnen. De knikloze overgangen volgen onmiddellijk uit een belangrijke eigenschap van de raaklijn aan een parabool.

2 De verzameling V_2 wordt eenvoudiger van structuur als *CD* de projectie is van *AB* op de drager van *CD*; de verzameling wordt dan gereduceerd tot een enkele rechte. Zie het vignet onder dit artikel.

b De lijnstukken *AB* en *CD* snijden elkaar.
We noemen het snijpunt *O*.
De verzameling V_2 bestaat nu uit twee van de veeltrekken die we in het vorige geval hebben gevonden.

We beschouwen nog afzonderlijk het in fig. 6 getekende geval.
We hebben $OA = OC$ genomen, en verder $OD < OC < OB$.

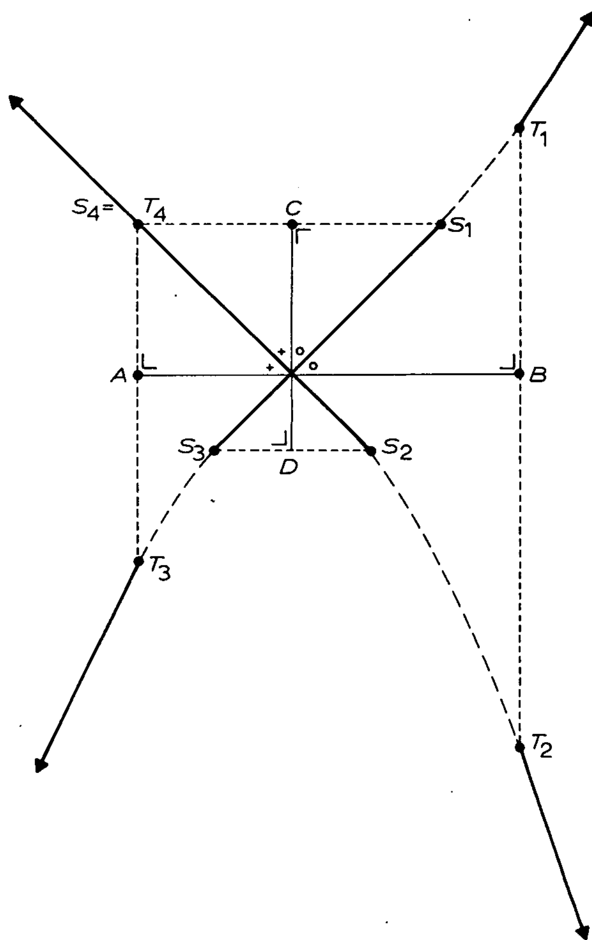
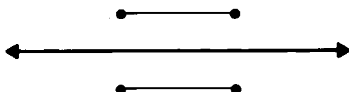


Fig. 6

De verzameling V_2 bestaat hier uit een vijftrek en een drietrek. Er zijn drie paraboolbogen: twee ervan behoren tot de parabool met D tot brandpunt en de drager van AC tot richtlijn; de paraboolboog binnen hoek AOC komt te vervallen; de bissectrice en de middelloodlijn binnen deze hoek liggen in elkaars verlengde.
In fig. 6 hebben we de paraboolbogen alleen gestippeld.



Aan de Minister van Onderwijs
en Wetenschappen
Nieuwe Uitleg 1
DEN HAAG

Den Haag, 7 mei 1974

Gaarne willen wij uw aandacht vragen voor de inhoud van de staatsexamens voor de akten wiskunde MO-A en B, omdat wij van mening zijn dat de studie voor die examens niet langer aangemerkt kan worden als een adequate voorbereiding op het leraarsberoep.
Zoals u bekend is, is het leerplan wiskunde aan scholen voor v.w.o., a.v.o. en l.b.o. in 1968 drastisch gewijzigd. Met name wijkt het onderdeel meetkunde in hoge mate af van wat eerder onderwezen werd. Daarnaast zijn statistiek en waarschijnlijkheidsrekening in het leerplan opgenomen, terwijl computerkunde op vele scholen onderwezen wordt als facultatief vak.
Het is zorgwekkend dat thans vele docenten onderwijs moeten geven in transformatiemeetkunde, statistiek en waarschijnlijkheidsrekening terwijl zij noch in hun eigen middelbare schooltijd, noch in hun studie voor de wiskundeakten met deze leerstofgebieden in aanraking zijn geweest.
Wij willen u daarom met klem verzoeken stappen te ondernemen die ertoe zullen leiden dat de betrokken regelingen worden gewijzigd. Met name zou het onderdeel projectieve meetkunde en centrale projectie op het examen MO-A vervangen moeten worden door spiegelingsmeetkunde of transformatiemeetkunde. Om de gedachten te bepalen verwijzen we hier naar het werk van F. Bachman, Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff (Springer Verlag 1959).
Statistiek en waarschijnlijkheidsrekening en computerkunde zullen in de plaats van andere onderwerpen van de examens geëxamineerd moeten worden.

Met de meeste hoogachting,
w.g. drs. J.W. Maassen
secretaris

Experimenten met projektonderwijs

KEES VAN BAALEN

Durgerdam

Na een periode waarin ideologische kritiek op het onderwijsbestel is geleverd en pogingen zijn gedaan om tot minder autoritaire verhoudingen te komen in de klas, zijn kritiese leraren nu ook bezig met het zoeken naar een nieuwe leerstofinhoud. Uit de wiskundesektie geef ik hier een verslag van pogingen tot projektonderwijs (voorlopig nog vanuit één vak tegelijk).

Doelstelling

Als doel van projektonderwijs met wiskunde formuleer ik eveneens voorlopig: 'het doel is leerlingen een met ogen, oren, handen en gevoel beleefde situatie te laten struktureren en hen ook een deel van hun ervaringen te laten kwantificeren. Om hen daarna met de gekwantificeerde gegevens enkele eenvoudige wiskundige operaties te laten uitvoeren en hen daarmee laten beleven dat wiskunde waardevol kan zijn bij het begrijpen van ingewikkelde situaties.'

Toepassingsgebied

Als onmiddellijk toepassingsgebied zien wij dié leerlingen die nu juist blijk hebben gegeven géén vertrouwen te hebben in de wiskunde. (of in zichzelf). Namelijk die leerlingen uit het voortgezet onderwijs die wiskunde *niet kiezen* in hun eindexamenpakket. Zij krijgen vaak toch wel wiskundelessen. In principe moeten zij daarin een onvoltooid b-programma voltooien. Over de praktijk spreken we maar niet.

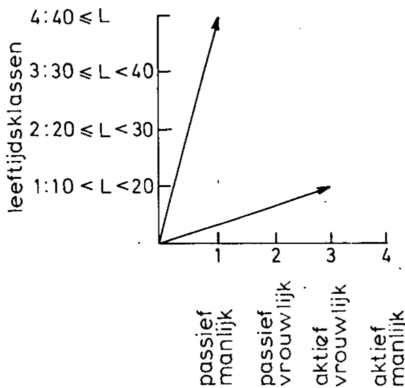
Wij willen deze dubbele negativiteit (geen wiskunde kiezen en dan een halfafgekapt programma moeten doen) omzetten in iets positiefs. Wij willen de a-richtingen een wiskunde-programma geven dat niet beleefd wordt als wiskunde-niet-kunnen, maar als een positieve keuze voor een programma met een eigen karakter. Verder denken wij in de toekomst aan mogelijke toepassingen bij vormingswerk voor werkende jongeren en het gymnasium-gamma.

Om te laten zien wat je kunt doen geef ik verslag van een paar m.i. gelukte projekten.

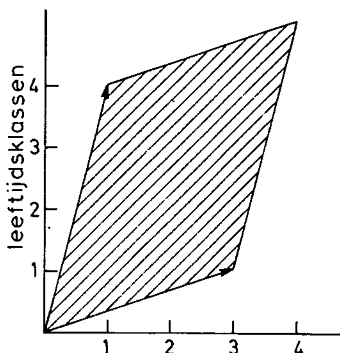
Het aankijktaboe

Een vierde klas (IVO) koos het probleem dat mensen elkaar niet rustig kunnen aankijken. In een klassegesprek werd dit beperkt tot de vraag 'hoe lang verdraagt iemand een blik in de ogen en waar hangt dat vanaf? '
In de volgende les gingen de leerlingen met stopwatches onzichtbaar in de hand de straat op en keken mensen aan. Zij noteerden: tijd, man of vrouw, en de geschatte leeftijd.

Om deze gegevens een antwoord te ontlokken moest een model gemaakt worden waarin plaats was voor de tijd, de leeftijd en het spelen van een aktieve of een passieve rol. Als aktief werd beschouwd iemand die het ogenkontakt opende. Er waren nu vier rollen, die werden geordend naar opklimmende spanning in hun blik (naar smaak van de leerlingen): 1– passief manlijk, 2– passief vrouwlijk, 3– aktief vrouwlijk, 4– aktief manlijk. In de relatie van deze vier rollen naar de leeftijden hoorde dan bij iedere persoon een vektor.

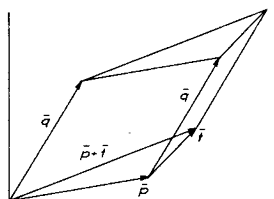


Dit zijn bijv. de vektoren als een schoolmeisje een oudere keer aankijkt.
Als 'spanningsveld' tussen twee personen werd gekozen het parallellogram opgespannen door hun vektoren (hoe groter rolverschil én hoe groter leeftijdsverschil hoe groter spanningsveld).
Vervolgens werd afgeleid dat de oppervlakte van dat parallellogram even groot was als de determinant van de twee vektoren. Daarvoor werd eerst nagegaan dat de som van de opgespannen oppervlakten tussen vektoren $\overline{p}$ en $\overline{q}$ en tussen $\overline{t}$ en $\overline{q}$ gelijk was aan de oppervlakte opgespannen tussen $\overline{p} + \overline{t}$ en $\overline{q}$.



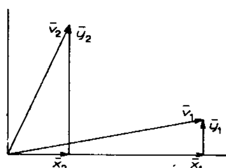
$I(\bar{p}, \bar{q}) + I(\bar{t} + \bar{q}) = I(\bar{p} + \bar{t}, \bar{q})$

Deze optelling werd tweemaal achter elkaar toegepast



$I(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = I(\bar{x}_1 + \bar{y}_1, \bar{v}_2) = I(\bar{x}_1, \bar{v}_2) + I(\bar{y}_1, \bar{v}_2) =$
$I(\bar{x}_1, \bar{x}_2 + \bar{y}_2) + I(\bar{y}_1, \bar{x}_2 + \bar{y}_2) =$
$I(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + I(\bar{x}_1, \bar{y}_2) + I(\bar{y}_1, \bar{x}_2) + I(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$

Omdat in elkaars verlengde liggende vektoren een oppervlakte 0 insluiten wordt



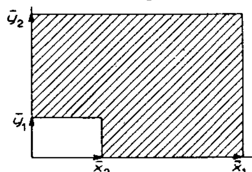
$I(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = I(\bar{x}_1, \bar{y}_2) - I(\bar{x}_2, \bar{y}_1)$

(het minteken omdat de oriëntatierichting is veranderd)

Omdat $\bar{x}_1$ en $\bar{y}_2$ en ook $\bar{x}_2$ en $\bar{y}_1$ rechthoeken opgespannen is eenvoudig in te zien dat

$I(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = x_1 y_2 - x_2 y_1$

Iedere leerling noteerde toen zijn op straat geworpen blikken in matrixvorm.

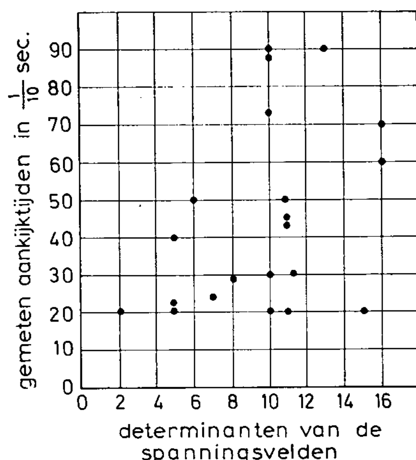


$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

En berekende de grootte van het spanningsveld uit de determinant

$$I(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = \begin{vmatrix} x_1 & y_2 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

De uitkomsten van de determinanten werden afgebeeld op de met de stopwatch opgenomen tijden. Toen verscheen de volgende puntenwolk op de muurkrant van het projekt.



Daaruit trok de klas de konklusie dat als het spanningsveld klein was de kijktijd ook klein was. Maar dat het omgekeerde niet gezegd mocht worden.
Tot slot waarschuwde ik nog wel dat het aantal waarnemingen veel te klein was om aan deze konklusie voorspellende waarde te geven buiten de werkelijk gedane waarnemingen.

Konkurrentie en konsumptie

Een tweede klas (lavo) stelde een hypothetisch boodschappenlijstje op (1 ons ham, 1 ons jonge kaas, ½ pond speculaas, 1 krop sla) dat moest dienen als indicatie om prijzen van vlees, kruidenierswaren, snoepgoed en groente bij verschillende soorten verkooppunten te vergelijken. De klas splitste zich in groepjes, die met dat lijstje in de hand maar supermarkts, een straatmarkt en naar gespecialiseerde buurtwinkels gingen. Van de daar vernomen prijzen werden per winkelsoort de gemiddelden berekend. Deze werden genoteerd in een grote matrix aan de muur van het lokaal.

Prijzenmatrix P

	supermarkt	gew. winkel	straatmarkt
1 ons ham	1,17	0,98	0,95
1 ons kaas	0,42	0,67	0,56
½ p. speculaas	0,99	1,09	0,98
1 krop sla	0,20	0,39	0,35

Daarna werd in de klas gepraat over verschillende konsumptiepatronen (o nee wij eten bijna nooit vlees, mijn moeder bakt altijd een ei) en onderscheidden tenslotte drie soorten gezinnen: een verantwoord etend gezin (vlees en groente en nooit snoepen), een vegetarisch gezin, en een gezin waar veel tussendoor gesnoept werd. De leerlingen noemden het resp.: droogpruimers, herbivoren en knabbelaars. Voor de drie gezinnen werd geschat hoeveel zij van genoemde artikelen op een dag nodig zouden hebben. Ook deze schattingen lieten zich als matrix noteren.

Verbruiksmatrix V voor een gezin van vier personen

	onzen ham	onzen kaas	½ ponden speculaas	kroppen sla
de droogpruimers	4	2	0	2
de herbivoren	0	2	½	3
de knabbelaars	2	3	1	1

Vermenigvuldiging van beide matrixen leverde een matrix K van de totale kosten per gezin bij de verschillende soorten verkooppunten.

Kostenmatrix K $\quad V \cdot P = K$

	supermarkt	gewone winkel	straatmarkt
droogpruimers	5,92	6,04	<u>5,62</u>
herbivoren	<u>1,94</u>	3,06	2,66
knabbelaars	<u>4,79</u>	5,45	4,91

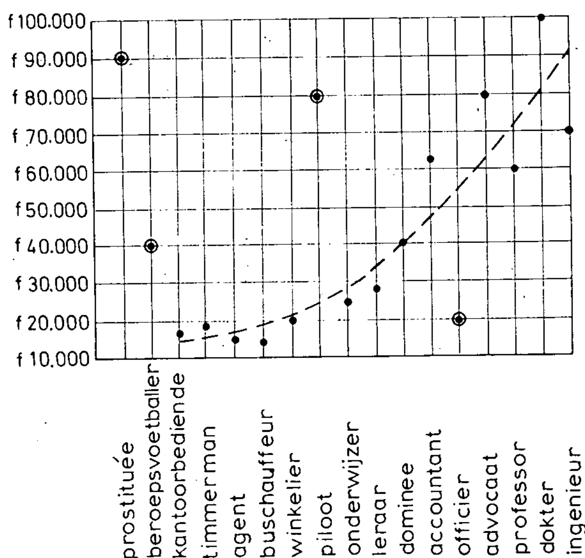
Waarbij opviel dat de snoepers en de vegetariërs het goedkoopst in een supermarkt terecht konden en de droogpruimers op de straatmarkt. Maar ook de absolute waarden vertellen wel iets.

Stand en salaris

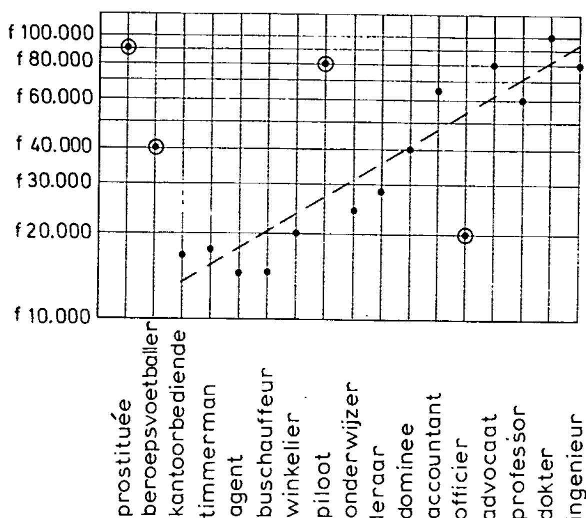
Een groep (4 IVO) koos uit verschillende door mij voorgestelde onderwerpen: de maatschappelijke ladder. In een soort brainstorm werden allerlei beroepen ge-

noemd, die ik allemaal op het bord noteerde. Daaruit kozen zij er 17 die representatief moesten zijn voor de ladder vanaf de laagste lagen tot de bovenste elite. Die 17 beroepen werden op losse kaartjes geschreven. Iedere leerling nam zo'n stel mee en legde ze voor aan mensen, die er even voor konden gaan zitten: in café's, aan bejaarden in een park, thuis aan hun ouders. Aan die mensen werd gevraagd de 17 kaartjes zo te rangschikken als de beroepen volgens hen op de maatschappelijke ladder thuis hoorden. De leerling noteerde dan de volgorde.
Die getallen schreef hij later op school achter de beroepen op de muurkrant. De door de groep verzamelde getallen werden opgeteld en het beroep dat de laagste som had werd dus door de mensen het hoogst op de beroepenladder geschat.

In de eerste brainstorm hadden wij ons ook bezig gehouden met de salarissen die gemiddeld bij de verschillende beroepen hoorden. Uit de schattingen in de klas hadden wij het gemiddelde genomen en achter de beroepen geschreven.
In de grafiek van de afbeelding van de salarissen op de maatschappelijke ladder verscheen nu de volgende punten-wolk:



Het viel op dat de meeste punten ergens in de buurt van een vloeiende kromme lagen, maar dat er vier punten merkwaardig uitsprongen: die van de prostituée, de piloot, de beroepsvoetballer en de officier. De eerste drie waren door de leerlingen meer salaris toegedacht (en wie weet krijgen ze dat ook?) dan overeen kwam met hun plaats in de beroepen-hiërarchie. De officier kreeg minder.
Toen deed een vermoeden mij grijpen naar logaritmisch papier en de leerlingen vragen de punten daar nog eens op uit te zetten. Tot hun en ook mijn verbazing bleken de punten nu om een rechte heen gestrooid te liggen.



De resultaten van projektonderwijs

Ik weet dat je met zulke dingen heel voorzichtig moet zijn. Bij dat laatste projekt heb ik de leerlingen dan ook onmiddellijk gewaarschuwd dat je niet meteen de konklusie mocht trekken dat de werkgevers met een logaritmentafel je salaris berekenen en dat er veel meer waarnemingen gedaan zouden moeten worden voor dat je echt met konklusies mocht komen.

Maar de waarde van zo'n projektje is volgens mij toch dat er nagedacht is over de inkomensongelijkheid, én rangorden, relaties, afbeeldingen, transformaties, en logaritmen. Ja het is zelfs zo, dat nog nooit in mijn tien jaar als wiskundeleraar het begrip logaritme zo weinig weerstand ontmoette.

Toen kwamen de leerlingen op het idee om mensen uit de verschillende beroepen te gaan opbellen en te vragen welk merk auto zij bezaten. Zij wilden dan gaan onderzoeken of er een verband te vinden was tussen het salaris en de cataloguswaarde van die vervoermiddelen. Ook werd het idee geopperd om langs die adressen te fietsen en de huurwaarden van de huizen te schatten en te zien of hun wiskundeleraar over hun dan gevonden getallen weer iets verhelderends wist te vinden.

Ik beweer niet dat leerlingen op deze manier beter leren werken met bijv. logaritmische functies of met lineaire algebra, dan op gewone scholen. Maar ik meen wel dat hun ideeën om het onderzoek voort te zetten ook onderwijsresultaten zijn, al zijn ze niet direkt vergelijkbaar met die van het traditionele wiskundeonderwijs. Een ander resultaat is volgens mij dat leerlingen wiskunde als een hulp ervaren hebben, en dat zij, als zij in hun latere leven ooit nog weer eens een determinant of een logaritme zullen tegenkomen, er minder van zullen griezelen dan heel wat mensen die het gebruikelijke onderwijs gevolgd hebben.

Vanwege het eindexamen en de voorgeschreven leerstof is dit soort projektonderwijs op de meeste scholen nu weinig mogelijk. Maar met een kleine overtreding van de voorschriften zou het direkt ingevoerd kunnen worden in die keuzepakketten waar wiskunde geen eindexamenvak is maar wel gegeven moet worden en waar de leraren met het huidige programma vaak met de handen in hun haar zitten.

Verscheidenheden

Prof. Dr. O. BOTTEMA

Delft

XCII Drie op een rij.

1 De zijden BC, CA en AB van de driehoek ABC worden door de rechten l en l' respectievelijk gesneden in P, Q, R en in P', Q', R' (fig. 1). Het lijnenpaar snijdt op elke zijde een lijnstuk uit. Zijn er lijnenparen, vragen wij, waarvoor deze even lang zijn: $PP' = QQ' = RR'$?
Wij preciseren de vraag door aan elk lijnstuk ook een teken toe te kennen. Wij oriënteren de driehoek (bijvoorbeeld) door de volgorde ABC en rekenen op BC een gericht lijnstuk positief als het de richting van BC heeft, enzovoort.
Wij kunnen de vraag dan ook een kinematische redactie geven. Drie punten, P, Q en R bewegen zich eenparig en met onderling gelijke snelheden langs BC, CA en AB. Op zeker ogenblik zijn zij collineair. Zijn er, vroeger of later, tijdstippen waarop zij eveneens op een rechte liggen? Het woord vroeger is letterlijk bedoeld; de constellatie mag ook in het verleden hebben plaats gevonden.

2 Daar P, Q, R collineair zijn, geldt volgens Menelaus

$$AR \,.\, BP \,.\, CQ + RB \,.\, PC \,.\, QA = 0. \tag{2.1}$$

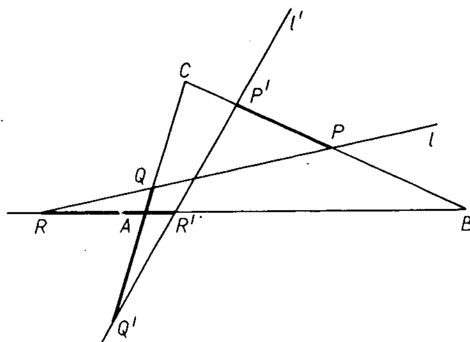
Is $PP' = QQ' = RR' = d$, dan geldt evenzeer

$$(AR + d) \,.\, (BP + d) \,.\, (CQ + d) + (RB - d) \,.\, (PC - d) \,.\, (QA - d) = 0. \tag{2.2}$$

In deze vergelijking verdwijnt de term met d^3 (inderdaad liggen voor oneindig grote d de drie punten collineair op de oneigenlijke rechte) en op grond van (1) ook de bekende term, zodat een lineaire vergelijking in d overblijft.
Als a, b en c de zijden van de driehoek zijn en $BP = p$, $CQ = q$, $AR = r$, dan voldoet d aan

$$(a + b + c)d = f. \tag{2.3}$$

waarbij f een zekere functie is van a, b, c, p, q, r.



Er is dus één oplossing, d.w.z. bij *elke rechte l behoort één rechte l' zó dat de figuur de gestelde eigenschap heeft.* De mogelijkheid is echter niet uitgesloten dat $f = 0$ is; in dat bijzondere geval valt l' met l samen.
Het is duidelijk dat ook omgekeerd aan l' de rechte l is toegevoegd; de gevraagde afstand is dan $-d$. De toevoeging van l' aan l is dus een involutorische (1,1) toevoeging. Wij zullen echter zien dat zij door het voorkomen van bepaalde singulariteiten geenszins eenvoudig is.

3 Wij brengen de toevoeging in analytische vorm door de driehoek te kiezen als grondfiguur voor een barycentrisch puntcoördinatenstelsel (x_1, x_2, x_3). Een rechte l met vergelijking $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ heeft de homogene lijncoördinaten u_1, u_2, u_3. Haar snijpunt P met BC is $(0, -u_3, u_2)$, waaruit volgt dat $BP = au_2/(u_2 - u_3), PC = au_3/(u_3 - u_2)$.
Dan is dus

$$BP' = \frac{au_2}{u_2 - u_3} + d, \qquad P'C = \frac{au_3}{u_3 - u_2} - d, \tag{3.1}$$

zodat de coördinaten van P' zijn

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -au_3 - d(u_2 - u_3), \quad x_3 = au_2 + d(u_2 - u_3) \tag{3.2}$$

terwijl overeenkomstige uitkomsten gelden voor Q' en R'. Deze drie punten liggen op één rechte als

$$\begin{vmatrix} 0 & -au_3 - d(u_2 - u_3) & au_2 + d(u_2 - u_3) \\ bu_3 + d(u_3 - u_1) & 0 & -bu_1 - d(u_3 - u_1) \\ -cu_2 - d(u_1 - u_2) & cu_1 + d(u_1 - u_2) & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{3.3}$$

dus als de met 2.3 overeenstemmende maar nader gepreciseerde vergelijking geldt

$$d(a+b+c)(u_2-u_3)(u_3-u_1)(u_1-u_2)$$
$$= bc\,u_1(u_2-u_3)^2 + ca\,u_2(u_3-u_1)^2 + ab\,u_3(u_1-u_2)^2, \qquad (3.4)$$

waaruit de waarde van d volgt.

Duiden we in (3.4) de coëfficient van d met N en het rechterlid met T aan, dan is $d = TN^{-1}$. Wij gaan nu d uit de coördinaten (3.3) van P', Q', R' elimineren. Men krijgt

$$-au_3 - d(u_2-u_3) =$$
$$= N^{-1}(u_2-u_3)\{-a(a+b+c)(u_3-u_1)(u_1-u_2)u_3 - bcu_1(u_2-u_3)^2$$
$$-cau_2(u_3-u_1)^2 - abu_3(u_1-u_2)^2\}$$
$$= -N^{-1}(u_2-u_3)\{a^2u_3(u_3-u_1)(u_1-u_2) + abu_3(u_1-u_2)(u_3-u_2)$$
$$+acu_1(u_3-u_1)(u_3-u_2) + bcu_1(u_3-u_2)^2\}$$
$$= -N^{-1}(u_2-u_3)\{au_3(u_1-u_2) + cu_1(u_3-u_2)\}\{a(u_3-u_1) + b(u_3-u_2)\} \qquad (3.5)$$

en overeenkomstige uitdrukkingen voor de andere elementen van 3.3. Als wij stellen

$$L_1 = b(u_1-u_2) + c(u_1-u_3), \qquad S_1 = bu_3(u_2-u_1) + cu_2(u_3-u_1),$$
$$L_2 = c(u_2-u_3) + a(u_2-u_1), \qquad S_2 = cu_1(u_3-u_2) + au_3(u_1-u_2), \qquad (3.6)$$
$$L_3 = a(u_3-u_1) + b(u_3-u_2), \qquad S_3 = au_2(u_1-u_3) + bu_1(u_2-u_3),$$

dan krijgt men

$$P' = (0, -L_3S_2, L_2S_3), \quad Q' = (L_3S_1, 0, -L_1S_3), \quad R' = (-L_2S_1, L_1S_2, 0) \qquad (3.7)$$

die naar behoren op een rechte l' liggen namelijk op

$$L_1S_2S_3x_1 + L_2S_3S_1x_2 + L_3S_1S_2x_3 = 0. \qquad (3.8)$$

Heeft dus l' de lijncoördinaten u'_1, u'_2, u'_3, dan geldt

$$u'_1 = L_1S_2S_3, \quad u'_2 = L_2S_3S_1, \quad u'_3 = L_3S_1S_2. \qquad (3.9)$$

Daar L_i lineaire en S_i kwadratische functies van u_1, u_2, u_3 zijn hebben wij: *de toevoeging van l' aan l is van de vijfde graad.*

Wij weten reeds dat de toevoeging involutorisch is: de relaties (3.9) zijn dezelfde als hun inverse. Wie het wil kan verifiëren dat een éénmaal herhaalde toepassing van 3.9 weer u_1, u_2, u_3 oplevert. De toevoeging is *birationaal.*

4 De toevoeging toont een aantal singulariteiten: de rechte l' is onbepaald als de rechterleden van 3.9 alle gelijk aan nul zijn. Dat doet zich dus voor bij die rechten l die voldoen aan een of meer der stelsels betrekkingen

$$L_1 = S_1 = 0, \quad L_2 = S_2 = 0, \quad L_3 = S_3 = 0 \tag{4.1}$$

$$S_2 = S_3 = 0, \quad S_3 = S_1 = 0, \quad S_1 = S_2 = 0 \tag{4.2}$$

De vergelijking $L_1 = 0$ ofwel $(b + c)u_1 - bu_2 - cu_3 = 0$ is lineair en stelt de waaier van rechten voor door het punt $D_1 = \{(b + c), -b, -c\}$. Daar D_1 voldoet aan de vergelijking $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ van de oneigenlijke rechte, bestaat de waaier uit onderling evenwijdige lijnen. De rechte door A heeft de coördinaten $u_1 = 0, u_2 = c, u_3 = -b$; haar vergelijking is $cx_2 - bx_3 = 0$, zij snijdt BC in $(0, b, c)$ en de conclusie is: *de rechten* $L_1 = 0$ *zijn evenwijdig met de bissectrice* d_1 *van hoek* A; evenzo stellen $L_2 = 0$ en $L_3 = 0$ de rechten voor, evenwijdig met de bissectrices d_2 en d_3 van respectievelijk de hoeken B en C.

$S_1 = 0$ of $(b + c)u_2u_3 - bu_3u_1 - cu_1u_2 = 0$ stelt een kromme van de tweede klasse voor, dus de verzameling raaklijnen aan een kegelsnede. Daar (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) en (1,1,1) aan de vergelijking voldoen is deze kegelsnede een parabool p_1 die aan de zijden van de driehoek raakt. Met $L_1 = 0$ heeft zij alleen de dubbelgetelde rechte (1,1,1) gemeen; haar oneigenlijk punt is dus D_1. *De parabool* p_1 *met vergelijking* $S_1 = 0$ *raakt aan de zijden van de driehoek en haar as is evenwijdig met de bissectrice* d_1; door deze gegevens is zij bepaald. Voor de parabolen p_2 en p_3 met de vergelijkingen $S_2 = 0$ en $S_3 = 0$ gelden analoge eigenschappen.
Uit (4.1) en (4.2) blijkt dat *singuliere rechten van onze toevoeging zijn: de oneigenlijke rechte en de zijden van de driehoek.* Elke andere rechte l heeft een ondubbelzinnig bepaalde toegevoegde l'.

Wij begrijpen nu ook meetkundig hoe het komt dat de inverse toevoeging rationaal is. Is l' gegeven, dan moet volgens 3.9 de rechte l voldoen aan:

$$u'_1 : u'_2 : u'_3 = L_1S_2S_3 : L_2S_3S_1 : L_3S_1S_2,$$

dus als $(u'_1 \neq 0)$ aan de twee vergelijkingen van de vijfde graad

$$F_1 = u'_1L_2S_3S_1 - u'_2L_1S_2S_3 = 0, F_2 = u'_1L_3S_1S_2 - u'_3L_1S_2S_3 = 0. \tag{4.3}$$

De doorsnede bestaat uit 25 rechten, maar bij nader inzien behoren daartoe de drie zijden, elk vijfmaal geteld en de oneigenlijke rechte negenvoudig. Erblijft één niet-singuliere rechte over.
Voor welke rechten l is de oneigenlijke rechte de toegevoegde?
Blijkbaar voor die, waarbij d oneindig groot wordt. Dat zijn volgens (3.4) de rechten die voldoen aan $(u_2 - u_3)(u_3 - u_1)(u_1 - u_2) = 0$.

De rechten $u_2 - u_3 = 0$ gaan alle door het punt (0, 1, −1), dat is het oneindig verre punt van BC. *Aan elke rechte l die evenwijdig is aan enige zijde van de driehoek is de oneigenlijke rechte toegevoegd.*
Aan een rechte l is de zijde BC toegevoegd als in 3.9 geldt $u'_2 = u'_3 = 0$, dus $S_1 = 0$. *Aan elke raaklijn van de parabool* p_1 *is de zijde BC toegevoegd, aan elke van* p_2 *de zijde CA, aan die van* p_3 *de zijde AB.*
Wij merken tenslotte op dat aan een rechte evenwijdig met de bissectrice d_1 (dus een rechte die aan $L_1 = 0$ voldoet) steeds een rechte door A is toegevoegd en uiteraard omgekeerd; men kan dat ook heel goed meetkundig inzien.
l en l' vallen samen als $d = 0$, dus als wegens (3.4)

$$bcu_1(u_2 - u_3)^2 + cau_2(u_3 - u_1)^2 + abu_3(u_1 - u_2)^2 = 0, \qquad (4.4)$$

waaruit volgt dat de dekrechten van de toevoeging een kromme van de derde klasse vormen. De oneigenlijke rechte is een dubbeltangent (met, zoals uit een nader onderzoek blijkt, imaginaire raakpunten; zij is dus een geïsoleerde rechte van de verzameling dekrechten); ook de zijden van de driehoek behoren tot de collectie. De dekrechten omhullen een kromme van de vierde graad.

5 In 1. namen wij op elke zijde een positieve zin aan en wij eisten de gelijkheid van PP', QQ' en RR' met teken en al. Laten wij deze restrictie vallen door ook de andere oriëntaties toe te laten, dan komen er uiteraard meer oplossingen. Blijkbaar kan men zich beperken tot de gevallen waarbij telkens op een der drie zijden de positieve richting wordt gewijzigd. De berekening verloopt analoog, sommige tekens worden anders, de bissectrices worden deels door buitenbissectrices vervangen. Wij kunnen uitspreken: *bij elke rechte l behoren vier rechten l' zó dat de drie lijnstukken die een paar l, l' uit de zijden van een driehoek snijdt, even lang zijn.*

6 Terugkerend tot de kinematische beschouwingswijze kan men de drie punten P, Q, R, die elk eenparig langs een zijde bewegen een willekeurige beginpositie geven en vragen of zij ooit een collineaire stand zullen passeren. De vraag laat een meetkundige discussie toe.
Immers de punten P, Q en R beschrijven congruente en dus projectieve puntenreeksen. De rechte PQ omhult dus een kegelsnede en wel een parabool, die aan BC en CA raakt; evenzo omhult PR een parabool die aan BC en AB raakt. De beide parabolen hebben buiten BC nog twee in het eindige gelegen raaklijnen. Er zijn dus twee collineaire constellaties, maar alleen een analytisch onderzoek kan in een bepaald geval uitmaken of deze reëel of imaginair zijn.

Verslag proefconferentie wis- en natuurkunde

J. VAN LINT

Zwolle

Op 10, 11 en 12 januari is in Utrecht een conferentie gehouden met wiskunde en natuurkundeleraren. Van 15 scholen kwamen een wiskundeleraar en een natuurkundeleraar, om mee te helpen bij de eerste aanzet, voor de integratie van deze toch wel erg verwante vakken.

Aanleiding

1. Al jaren voor dat de kolossale mammoet onze poorten binnenstrompelde, bestonden er aansluitingsproblemen, betreffende de wiskunde kennis, nodig voor het volgen van de natuurkundelessen. Vooral de differentiaalrekening gaf nogal eens aanleiding tot strubbelingen. Bij natuurkunde wil men vrij vroeg gebruik maken van de regels voor het differentiëren, maar de wiskundeleraar kan die niet verantwoord behandelen, zonder een uitgebreide inleiding. De opbouw van de d.r. is in wezen erg moeilijk en van zodanige fundamentele betekenis, dat het zo degelijk mogelijk moet worden gedaan. Als de regels eenmaal bekend zijn, is het voor niet werkelijk geïnteresseerde leerlingen een niet te verteren zaak, dat nog een hele tijd gewerkt moet worden, om de opbouw 'netjes' te doen. Het verrassende element is er uit en motiveer ze dan maar eens!

2. Een tweede kwestie, die menigeen dagelijks opmerkt is de 'hokjesgeest'. Bij de natuurkundeles weten de leerlingen weinig meer van de kennis, opgedaan bij wiskunde, en omgekeerd. In de ene les wordt er uitgebreid gewerkt met functies en hun grafieken ($f: x \rightarrow ax^2 + bx + c$ of $y = ax + b$ enz.). In een andere les spreekt men van: 'de druk is nu een functie van het volume' of: 'zet p eens uit tegen $\frac{1}{v}$'. Zien alle leerlingen meteen een verband tussen beide formuleringen? Is de variatie, die we aanbrengen in onze vraagstukken, te klein voor hen om te zien, dat de deur tussen de 2 hokjes best op eenkiertje mag? In elk geval moeten we er voor zorgen, dat geen aparte geheugencellen gevuld moeten worden, met gelijke of zeer goed vergelijkbare begrippen.

3. Een derde belangrijke reden voor de conferentie is geweest het nieuwe leerplan wiskunde en de nieuwe didactieken bij zowel wis- als natuurkunde. De veranderde opvattingen over het belang van het experiment bij de natuur-

kundelessen, zonder dat er sprake is van beknotting van het programma betekent ook, dat er minder tijd is voor wiskundige achtergronden.

Geschiedenis

Op 10 oktober 1970 vergaderden delegaties van de C.M.L.W. en de C.M.L.N. onder voorzitterschap van Prof. Dr. H. Freudenthal en besloten een commissie, bestaande uit 5 wiskunde- en 5 natuurkundeleraren, in het leven te roepen, om uit te zoeken hoe de twee groepen leraren tot wederzijdse hulpverlening te bewegen zouden zijn.
Na informatie van elkaar, omtrent de leerplannen en hun achtergronden kwam die commissie tot de conclusie, dat alleen gecoördineerde herschrijving van de leerplannen, in samenspraak met andere gebruikers van wiskunde, een werkelijke oplossing van de problemen zou bieden.
Voorlopig moest een poging om een betere afstemming van de vakken op elkaar, verkregen worden, door wis- en natuurkundeleraren aan eenzelfde school, te stimuleren meer en meer samen te werken en via overleg tot efficiënter, geïntegreerd onderwijs te komen.
De leden van de commissie hebben gedurende 2 jaren, een zeer groot aantal discussiestukken bijeen gebracht. Een proefconferentie leek de beste manier om de geconstrueerde 'stimulerende middelen' op hun bruikbaarheid te toetsen.

De Conferentie

Prétest

Bij aankomst werd de deelnemers gevraagd naar hun mening over een aantal, op de conferentie te bespreken, kernpunten zoals:
a. waar kan de eerste kennismaking met de differentiaalrekening het beste plaats vinden?
b. is het mogelijk het begrip afgeleide en de afgeleiden van x^n en sin x, op een verantwoorde wijze te behandelen in het begin van de vierde klas?
c. is men op de hoogte van elkaars methode?
d. is er verschil opgemerkt tussen de kennis van de congruentie- en gelijkvormigheidskenmerken, bij de leerlingen van vroeger en nu, in de natuurkundelessen?

Inleiding

Prof. Freudenthal opende de conferentie en hield daarbij een pleidooi voor minder star onderwijs. Men moet elk onderwerp in een rijke context aanbieden. Hij illustreerde zijn woorden met een aantal levendige voorbeelden, zoals hij dat nog enkele malen deed later in de conferentie, toen hij als vervanger optrad van Prof. van der Blij, die door een verkeersongeluk tijdelijk uitgeschakeld was.

Verzamelingen, relaties en functies

Voor de fysici werd een toelichting gegeven op de moderne wiskundige terminologie. Welke kennis moeten ze wel, en welke niet verwachten bij leer-

lingen van de tweede en derde klas over verzamelingen, relaties en functies? Is een tabel met meet-resultaten een functie? Bij onze experimenten leveren de metingen rationale getallen op, maar door in de grafiek een 'vloeiende kromme' te tekenen hebben we domein en bereik van de beschouwde functie uitgebreid tot deelverzamelingen van ℝ.

Practicum
Voor de wiskundigen was er een practicum rondom het thema: 'functie en grafiek uit het experiment'. Na een geregistreerde valbeweging, werd met schaar en lijmpot een stel grafieken geconstrueerd. Ook werd uitgelegd hoe met een oscilloscoop een aantal functies 'zichtbaar' gemaakt kon worden. De bedoeling van de proeven was, enerzijds te laten zien hoe het begrip functie bij de natuurkunde moet kunnen functioneren, anderzijds om een discussie op gang te brengen, over de mogelijkheid van verdieping van het functiebegrip door zulke proeven.
In een middagzitting werd in kleine groepen gezocht naar en gesproken over, voorbeelden uit de onderbouw natuurkunde, waarvoor een nieuwe wiskundige aanpak nodig zou zijn. Tevens werd gezocht naar voorbeelden, van min of meer parallel gegeven leerstof, welke gebruikt zouden kunnen worden om de 'hokjesgeest' te doorbreken.

Voorbeelden
1. De mate van uitrekking van een veer tengevolge van een gewicht, dat eraan gehangen wordt, is een functie van de grootte van dat gewicht. Is dit zonder meer juist? Hoe zit het met die uitrekking, als het gewicht zeer groot is? Moet het domein van de functie aangegeven worden, of moeten we over een relatie spreken, waarbij dan in de grafiek ook is aan te geven wat er gebeurt als het gewicht zeer groot wordt?
2. In verschillende formules van de natuurkunde komen parameters voor. Men kan zich nu afvragen of het verstandig is om ook bij de natuurkundeles af en toe te spreken over een verzameling van functies of van een functie van meer veranderlijken en ook de notaties aan te passen bij die, welke de leerlingen in de wiskundeles te zien krijgen. Bij een eenparig versnelde rechtlijnige beweging b.v.:

$$s = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \text{ of: } s : t \rightarrow v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \text{ of:}$$
$$s(v_0, t) = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \text{ of: } s_{v_0} : t \rightarrow v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2.$$

Limieten
Op de tweede dag is voor de wiskundeleraren nog een aantal experimenten voorgedaan, met o.a. als doel een discussie op gang te brengen, over de mogelijkheden die er in de natuurkunde zijn om het limiet-begrip voor te bereiden.

Transformatiemeetkunde
Voor de natuurkundeleraren was er een inleiding over de transformatiemeetkunde. Hoewel hier te diep op ingegaan werd, bleek toch wel bij de bespreking en bij de opgaven, die gemaakt moesten worden, dat men bij de natuurkunde wel degelijk rekening zal moeten houden met de drastische wijzigingen, die in het meetkunde onderwijs plaats gevonden hebben.

Voorbeelden
1. Bij terugkaatsing van een lichtstraal tegen een vlakke spiegel, is de hoek van inval gelijk aan de hoek van terugkaatsing. Hieruit is af te leiden, dat de teruggekaatste stralen bij verlenging, gaan door het 'wiskundige spiegelbeeld' van de lichtbron.
2. De breking van een monochromatische evenwijdige lichtbundel, op het grensvlak van 2 media, is te verklaren met het principe van Huygens.
3. De berekening van de grootte van de versnelling bij een eenparige cirkelbeweging.

Differentiaalrekening eerder?
Met een geprogrammeerde instructie over een verkorte invoering van de differentiaalrekening in een vroeg stadium heeft de commissie getracht na te gaan, of de wiskunde- en de natuurkundeleraren het eens zouden kunnen worden over het tijdstip waarop en de intensiteit waarmee de d.r. in eerste instantie zu moeten worden ingevoerd. Het bleek hierbij, dat erg veel docenten van mening waren, dat er tegenwoordig geen noodzaak meer is voor de een vervroegde invoering van de d.r. Is dat op alle scholen het geval?

Integraalrekening en differentiaalvergelijkingen
Tijdens de derde dag kwamen voornamelijk problemen van de bovenbouw V.W.O. ter sprake.
1. De arbeid verricht door een elektrisch veld van een puntlading bij voortstuwing van een andere puntlading is een functie, waarvan de afgeleide gelijk is aan de kracht-functie. Is het nuttig of juist verwerpelijk om af en toe, bij zulk soort onderwerpen, in de natuurkundeles te laten zien dat zulke dingen te verklaren zijn zonder er een limiet-som of een oppervlakte bij te halen? Te verdedigen is ook, dat juist de wiskundeleraar op het geschikte moment, bij de integraalrekening zo'n voorbeeld eens met behulp van majoreren en de 'insluitstelling' behandelt.
2. Men is in het algemeen bang, dat de differentiaalvergelijkingen te laat bij de wiskundeles aan de orde komen, om nog nuttig te zijn voor de natuurkunde. De vraag is nu, of de natuurkundeleraar bij zijn theorie en experiment, de differentiaalvergelijking kan opstellen en wel zó, dat er bij wiskunde op voortgeborduurd kan worden?

Transfer
Op de laatste middag hield dr. P.M. van Hiele een lezing over systeemscheiding en transfer. Op een zeer openhartige manier gaf hij een heel regiment voorbeelden van zeker geen traditionele methoden, om moeilijkheden bij de behandeling van de in de conferentie ter sprake gekomen onderwerpen, aan te pakken. Hij gaf zeer duidelijk te kennen, dat hij er geen voorstander van is, bij de wiskundelessen al te precies te werk te gaan. We moeten, aldus Van Hiele, meer doen met wiskunde dan veel tijd stoppen in bewijsvoering.
Naar aanleiding van de reacties bleek, dat zijn lezing beter aan het begin, dan aan het eind van de conferentie geplaatst had kunnen worden. Er zou vermoedelijk sneller een goede discussie op gang gebracht zijn.

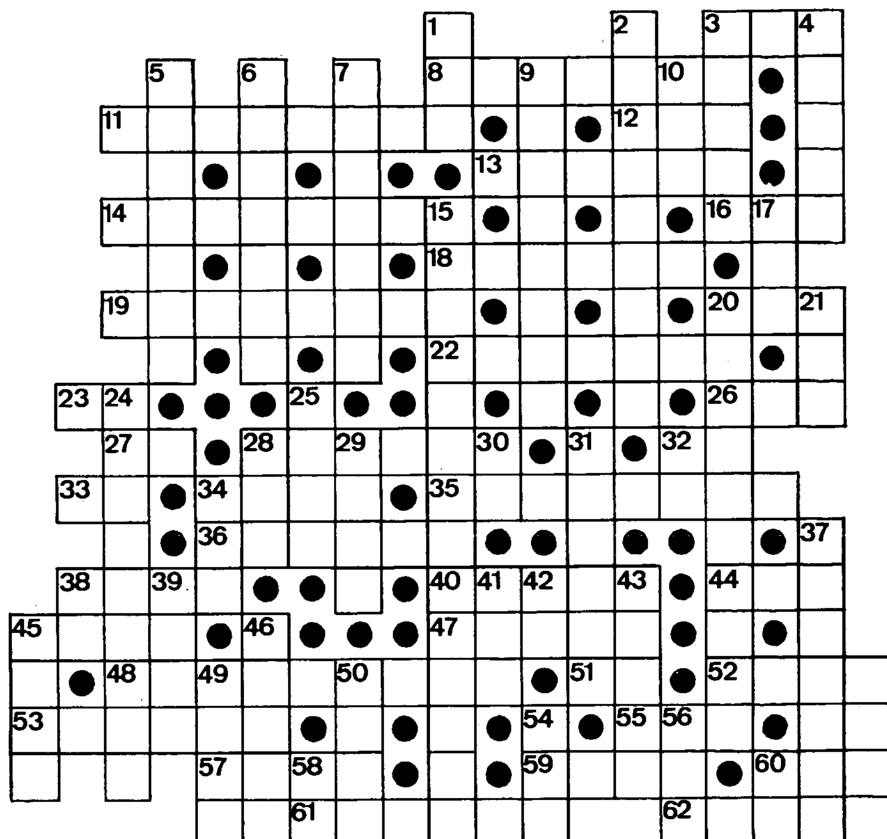
Posttest
De conferentie werd afgesloten met een posttest, die ten doel had, na te gaan of de meningen van de prétest veranderd waren. Bij de bestudering van de testen kwamen wel enkele markante punten naar voren, maar gezien het geringe aantal deelnemers zijn er toch geen conclusies uit te trekken. In het algemeen was men niet gewend uitgebreid samen te werken en zag men na afloop duidelijk in, dat een voortdurend contact tussen de docenten uit de twee secties absoluut noodzakelijk is. Of de samenwerking ook een voldoende voorwaarde voor de gewenste integratie van de twee vakken is, zal de toekomst moeten leren.

Wat nu?
De commissie is van mening, dat de proefconferentie heeft aangetoond, dat het erg nuttig zou zijn meerdere conferenties te houden, om zodoende een grote groep wis- en natuurkundedocenten te stimuleren om te zoeken naar lesmethoden, die zullen leiden naar optimale coördinatie.

Begeleidingscommissie

Namens de C.M.L.N.	de heren Balkema, Dijkwel, Groen, Lignac en Markering.
Namens de C.M.L.W.	de heren Bouman, van Dormolen, van Lint, van Niekerk en Nijdam.

Kryptogram



Horizontaal

3 28 Verticaal
8 Meisjes, wat moeilijk! (7)
11 Deze Franse uitkomsten waren in de oorlog niet bepaald populair (8)
12 Voor als een spelletje wiskundigen niet te min is (3)
13 Ik heb de pest er aan als de leerlingen een lijn zo noemen (6)
14 Elk zijn part (8)
16 Of het weer stand houdt? Ik wil er hom of kuit van (3)
18 Slot aan het slot van een kromme (6)
19 Een optelling, waarover we de duvel in kregen (8)
20 Gemeentelijk rekenclubje (3)

22 Op die lijn worden de dieren akelig warm (7)
23 Ongeveer een m^2 (2)
26 Maximum om in te bijten (3)
27 Produkt van drie opeenvolgende priemgetallen, dat een uiterst nuttige instelling oplevert (2)
28 Italiaan, die in een driehoeksverhouding is betrokken (6)
32 Tegen (2)
33 Draaierige noot (2)
34 Wordt bij definitie vastgesteld (4)
35 Vloeibaar maken van vergelijkingen (8)
36 28, 29, 30 of 31 (6)
38 Doe het en je krijgt 14 (4)
40 Δk (5)
44 Wordt gebruikt bij de beschrijving van erg slecht weer (3)
45 In een n-dimensionale ruimte aangegeven door n coördinaten (4)
47 Halve lijnen (5)
48 De 101 keren gebroken cijfers (9)
51 23.45 – 24.00 (2)
52 V bij de buren (4)
53 Wiskundig begrip, waar je beter niet achter kunt komen (6)
55 Zware arbeid (3)
57 Ruitvormig kledingstuk (4)
59 $\forall$. (4)
60 Verdwenen begrip uit de grafentheorie (3)
61 Heks op de dam, die Euclides onschatbare diensten heeft bewezen (6)
62 27 + 99 = ook een 27 (2)

Vertikaal

1 Onbekend afval, vaak horizontaal (3)
2 Als bruid en bruidegom beide erg mager zijn (9)
3 $\frac{ds}{dt}$ (5)
4 Ook getallen kunnen steken! (5)
5 Ze kunnen ook stuk zijn (7)
6 De hoogst genummerde zijn het beste bij (7)
7 Kortste route voor een airline (7)
9 Zich overtuigen van het bestaan van een bijectie (8)
10 De tweede letter van de buren (3)
15 Pro of contra een kunstprodukt, bewijs van geen bewijs (14)
17 Rand (3)
20 Goniometer (10)
21 Implicatie (3)
24 Heeft twee van 27 en ook 62 (9)

25 Vriend van Lebesgue (4)
28 3 horizontaal
29 $3^2.101$ (4)
30 Maat uit 24 (2)
31 Waarvoor zelfs een tandarts wiskunde moet leren (6)
32 Toekomstige spil (2)
34 (3)
37 Imaginair (7)
38 C (2)
39 Als ik bedel, bloos ik, dat getuigt van een goed karakter (4)
41 Opvolger, maar ook voorganger van 34 (3)
42 x (2)
43 Alleen 1 ton (5)
45 Jus (4)
46 Feestelijk getal (4)
49 Testbron (4)
50 ΔK (4)
54 Wiskunde (3)
56 Veroorzaakt afnemende 3 vertikaal (3)
58 Minimale mens (2)

Contributie 1974-1975 (voortaan via acceptgiro)

Een dezer dagen zullen de leden van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren een acceptgirokaart ontvangen voor de betaling van de contributie over het jaar 1974-1975.
Ingevolge besluit van de laatste jaarvergadering zal de contributie *f* 25,— bedragen. Leden die Euclides niet via de vereniging ontvangen betalen *f* 10,—.
Wie inmiddels al contributie heeft betaald kan de acceptgirokaart natuurlijk weggooien. Om technische redenen is het niet mogelijk de leden die al betaald hebben uit te schiften.
Wie te weinig betaald heeft wordt dringend verzocht aan te vullen.

De penningmeester

Boekbespreking

Heinrich Bauersfeld, Hendrik Radatz en Knut Rickmeyer, *Matema-Körperspiel mit Begleitschrift;*
DM 37.– en DM 13.40;
Hermann Schroedel Verlag, Hannover 1973.

Körperspiel betekent boeiend didactisch materiaal ter scholing van het ruimtelijk voorstellingsvermogen. Het is de bedoeling dat met behulp ervan aan jonge leerlingen via de weg van creatieve bezigheid geometrisch inzicht zal worden bijgebracht.

De drie auteurs maakten ook deel uit van het auteursteam dat in 1970 de beide delen *Alef* 1 en *Alef* 2 van de *Wege zur Mathematik* tot stand bracht naar aanleiding van de uitkomsten van een als *Frankfurter Projekt* bekend staand didactisch experiment. Zie hiervoor Euclides 47, p. 74-75. Aan het *Begleitschrift* werkte bovendien nog mee Barbara Schumacher.

Het is verheugend te mogen ontdekken dat in een tijd waarin het object van de meetkunde uit ons wiskunde-onderwijs dreigt te worden weggedrukt, er ernstige pogingen als die rondom Körperspiel worden ondernomen met de bedoeling in kleuter- en basisonderwijs een verantwoorde grondslag te leggen voor gemoderniseerd meetkunde-onderwijs op hoger niveau. Terwijl in het verleden het meetkunde-onderwijs op de basisscholen beperkt bleef tot wat rekenkundige toepassingen bij oppervlakte- en inhoudsbepalingen, dan wel ontaardde tot een vrij povere 'vormleer', zien we hier de weg geopend om de leerlingen vanuit Van Hiele's nulde denkniveau te doen opklimmen tot inzicht in zinvolle meetkundige structuren.
Het didactisch materiaal van Körperspiel bestaat uit 64 stevige kuben met ribben van 3 cm, geplasticeerd en in diverse kleuren. Er zijn: 10 grijze kuben, 4 rode, 4 blauwe, 4 groene, 4 gele, 2 witte (dobbelstenen), 1 zeskleurige, 8 zwart-witte, en voorts 27 genummerde in de kleuren rood, blauw en geel op verschillende manieren over de zijvlakken verdeeld.

Groot is het aantal opdrachten dat aan de hand van deze kubenverzameling kan worden uitgevoerd. In het Begleitschrift worden enige series opgaven aangegeven. In deze handleiding zijn de series opgaven in toenemende graad van moeilijkheid opgenomen. Er wordt echter geen leeftijdsniveau bij vermeld om te helpen voorkomen dat de individuele leerling daardoor in zijn ontplooiingmogelijkheden zou worden afgeremd. De diverse opgaven zijn volgens eén uniform schema geredigeerd: begonnen wordt met een beschrijving van het te gebruiken materiaal, daarna worden de opgaven geformuleerd, de doelstellingen, de spelregels en de strategieën besproken en mogelijke varianten aangewezen.

De auteurs hebben het karakter van het materiaal en de opgaven doeltreffend weten te illustreren door het opnemen van een achttiental citaten ontleend aan Freudenthal's artikel uit 1971 *Geometry between the Devil and the Deep Sea.* De diverse hoofdstukken worden telkens met zo'n citaat ingeluid. Ik wijs op de uitspraak 'Auf dem Grundniveau denkt das Kind mit seinen Händen, mit seinen Augen, mit seinen Bewegungen' (p. 49) en het slotcitaat van p. 77:
'Geometrie wird durch dogmatische Ideen von mathematische Strenge gefährdet. Sie treden in zwei verschiedenen Formen auf: Entweder durch das Aufsaugen der Geometrie in ein System von Mathematik als Lineare Algebra oder durch das Einschnüren in eine strenge Axiomatik. So ist es nicht nur ein Teufel, der die Geometrie bedroht . . . Es sind deren zwei. Der einzig verbleibende Ausweg ist das weite Meer. Das bedeutet ein sicheres Entkommen, wenn man das

Schwimmen gelernt hat. Und in der Tat ist dies der Weg auf dem Geometrie gelehrt werden sollte, just wie das Schwimmen'.
'Körperspiel' is inderdaad op te vatten als een handleiding bij dit leren zwemmen!

Ter nadere oriëntatie inzake de inhoud van het boek laten we hier nog een opsomming volgen van de titels van de opvolgende hoofdstukken.
Körper bauen; Würfel und Würfeln; Quader aus Würfeln; Anschauungs- und Vorstellungsübungen; Würfelanordnungen; Probleme mit Nachbarwürfeln- Strategiebildung; Volumen und Oberfläche von Körpern; Nachbarprobleme eines grünen Würfels; Würfelschachtelungen; Würfelanordnungen und Folgen; Transformationsspiele; Der sechsfarbige Würfel; Vermischtes; Der Spielwürfel; Kombinatorik; Wahrscheinlichkeit.

De doos met kuben ziet er degelijk en fraai uit. De typografische uitvoering van de handleiding voldoet aan hoge eisen; de talrijke tekeningen zijn duidelijk, de gekleurde figuren prachtig van tint. Aan het slot verwijzen de auteurs naar andere vakliteratuur.

De uitgever beveelt Körperspiel aan bij ouders, onderwijzers bij kleuter- en basisonderwijs en bij aanstaande onderwijzers. Naar mijn mening zullen achter ook leraren in het voortgezet onderwijs, in het bijzonder zij die in de lagere klassen les geven, er profijt van kunnen hebben als ze van dit didactisch materiaal kennis nemen.

In de vakbibliotheken van de wiskundeleraren op onze scholen is deze uitgave stellig op zijn plaats.

Joh. H. Wansink

E. Martensen, *Analysis V;* V.I. Hochschultaschenbücher, Band 867, Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich, 1972; 275 bladz., DM 7,90.

In dit boekje geeft Prof. Martensen een duidelijke uiteenzetting van de basisbegrippen en -stellingen uit de functionaalanalyse met enkele belangrijke toepassingen in de theorie van de integraalvergelijkingen, waarbij het onderzoek naar fixpunten (invariante vectoren) van (integraal-) operatoren en het ontwikkelen van methoden om deze te benaderen, een rol spelen. Aan het einde van het boekje wordt in enkele paragrafen ingegaan op vectorruimten van oneindige dimensie, met als belangrijke voorbeelden de prae-Hilbertruimte en de Hilbertruimte en hun betekenis voor de theorie van de Fourier-reeksen.
Het boekje is ontstaan uit een college dat in 1970 te Darmstadt voor studenten in de wiskunde, natuurkunde en theoretische elektrotechniek werd gegeven. Als voorkennis wordt alleen de klassieke analyse verondersteld. Omdat kennis van Lebesgue-integratie daar niet toe wordt gerekend, is het boekje bedoeld als een eerste kennismaking met de functionaalanalyse. De grondslag daarvan wordt op een dermate heldere en didactisch uitstekende wijze gelegd, dat iedereen die met dit belangrijke gebied van de moderne analyse in aanraking wil komen hier een welkome gids tot zijn beschikking heeft. In een literatuurlijst wordt naar een aantal andere werken over het onderwerp verwezen.
De typografische verzorging is goed, het aantal typefouten is zeer gering. De prijs is laag voor hetgeen geboden wordt.

W.J. Claas sr.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P.G.J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.

317. Te bewijzen:

p is priem $\wedge$ $p^2 + 2$ is priem $\Rightarrow p^3 + 2$ is priem.

(auteur onbekend)

318. Zeven mannen bevinden zich 700 meter van het station. Ze moeten 4 koffers naar het station brengen. Nooit draagt iemand twee koffers tegelijk. Maak een rooster van het wisselen zo, dat ieder over 400 meter een koffer draagt.
Leg nu de beperking op, dat het aantal wisselingen minimaal is. En verder, dat de mensen naast elkaar lopen in een constante volgorde en men bij het wisselen alleen zijn koffer aan een directe buurman mag afgeven. (B. Kootstra)

Oplossingen

315. Maak een waardetabel van A, B, X, Y en de linkerleden van (1), (2), (3), (4).

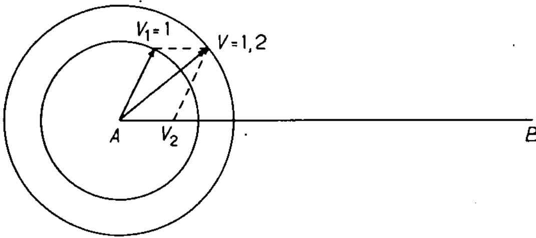
A	B	X	Y	(1)	(2)	(3)	(4)	
0	0	0	0	0	0	0	0	x
0	0	0	1	0	0	0	0	
0	0	1	0	0	0	0	0	
0	0	1	1	0	0	1	1	x
0	1	0	0	0	0	0	0	
0	1	0	1	1	0	0	1	
0	1	1	0	0	1	1	0	x
0	1	1	1	1	1	1	1	
1	0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	1	0	1	1	0	
1	0	1	0	1	0	0	1	
1	0	1	1	1	1	1	1	
1	1	0	0	0	0	1	1	
1	1	0	1	1	1	1	1	
1	1	1	0	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	1	1	x

De laatste vier kolommen moeten resp. dezelfde cijfers bevatten als de eerste vier. Dit is het geval in de vier aangekruiste gevallen. Dus: er kunnen zijn

elementen die tot geen van vier verzamelingen behoren,
elementen die tot alle vier verzamelingen behoren,
elementen die tot X en Y behoren maar niet tot A en B,
elementen die tot B en X behoren maar niet tot A en Y,

maar geen andere.

316. Beschouw twee coördinatenstelsels: stelsel I is vast verbonden met het vlak, stelsel II is zo gekozen, dat B t.o.v. dit stelsel in rust blijft. A beweegt zich zo, dat hij t.o.v. stelsel II een rechte lijn beschrijft, die naar B gericht is. In de figuur zijn getekend de snelheid v_1 van B, dus van stelsel II t.o.v. stelsel I, en de snelheid v_2 van A t.o.v. stelsel II. De resultante v van v_1 en v_2 is de snelheid van A t.o.v. stelsel I. Dus moet de grootte van v_2 zo gekozen worden, dat de resultante v als lengte 1,2 heeft.
Hieruit volgt:
a. het is voor B onmogelijk A te blijven ontwijken,
b. de beste strategie voor B is zich rechtlijnig van A af te bewegen; in dat geval is v_2 zo klein mogelijk, nl. 0,2 m/sec., en zal de ontmoeting plaats hebben na 500 sec.



Ad 313. Dr. R. Broeckx maakt me attent op een vergissing in dit probleem. In de opgave had moeten staan, dat elk van de 12 elementen in ten minste één deelverzameling voorkomt. Dan kan men inderdaad aantonen dat het onmogelijk is 10 deelverzamelingen te vormen waarin geen tweetal elementen driemaal voorkomt.
Het tweede deel van de oplossing blijft onveranderd.

Genootschap voor Geschiedenis der Geneeskunde, Wiskunde en Natuurwetenschappen

Najaarsvergadering van het Genootschap, voor Geschiedenis der Geneeskunde, Wiskunde, Natuurwetenschappen en Techniek.
Deze zal gehouden worden op zaterdag 5 oktober en zondag 6 oktober 1974 te Eindhoven.
Belangstellenden kunnen zich voor nadere inlichtingen en voor toezending van het programma wenden tot de secretaris Dr. A.J.E.M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (post Breda).



GEEFT U EEN EIGEN HUIS ZONDER ZORGEN

Totale financiering van uw eigen huis (oud of nieuw), met **alle** bijkomende kosten. Normale rente over gehele lening, geen afsluitprovisie. Adviezen na bestudering van uw koopakte.

Vraag budget-schema aan:

Het Voorlichtingsbureau voor Academici, hogere ambtenaren, staffunctionarissen, leraren etc.

Maliebaan 98, Utrecht, tel. 030-31 97 47*

MATHEMATISCHE PROJECTEN „EPSILON"

L.S.

Na storting van f 3,40 op girorekening 732104 (t.n.v. Van der Vlis, Utrecht) ontvangt U 10 bladen „Organisch Didactische Voorbeelden" (25 items) ter aanvulling van het lesmateriaal en t.b.v. bijlessen.

INHOUD